Gauss積分の様々な求め方

山K@yamak0523

概 要

ここでは, Gauss 積分 (Gaussian)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

を様々な方法で求めていく.

方法 1 [極座標変換を用いる方法 (直感 ver.)] この方法が 1 番有名で 1 番簡単な方法である.

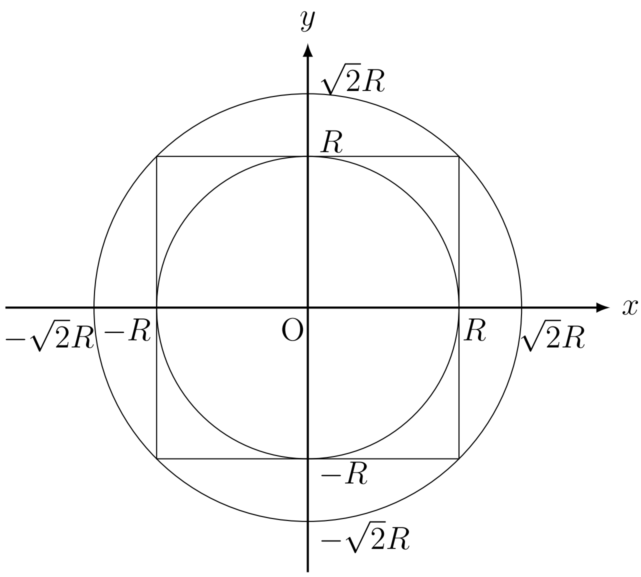
$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\,d\theta \;(\because x = r\cos\theta, y = r\sin\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,d\theta \\
&= \pi
\end{aligned}$$

よって $I \geq 0$ であるから, $I = \sqrt{\pi}$ となる. ■

方法 1 [極座標変換を用いる方法 (厳密 ver.)] 先ほどの方法をもう少し厳密に行う.

$R > 0$ に対して $I_R = \displaystyle\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx$ とおく. このとき以下の図から

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leq {I_R}^2 \leq \iint_{x^2+y^2 \leq 2R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$



極座標変換 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ を用いると

$$\iint_{x^2+y^2\le R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^R re^{-r^2}\,dr\,d\theta=2\pi\left[\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R=\pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 2R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}R} re^{-r^2}\,dr\,d\theta=2\pi\left[\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\sqrt{2}R}=\pi\left(1-e^{-2R^2}\right)$$

より, $\sqrt{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}\le I_R\le\sqrt{\pi\left(1-e^{-2R^2}\right)}$ が得られるから, $R\to\infty$ の極限をとることではさみうちの原理から $I=\sqrt{\pi}$ であることがわかる. ■

方法 2 [Wallis 積分を用いる方法] この方法もいろいろな文献で確認できる.

Wallis 積分とは 0 以上の整数 m に対して

$$S_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx$$

で定義される積分のことである. この積分は部分積分を用いることにより, n が 0 以上の整数のとき

$$S_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, S_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, S_0=\frac{\pi}{2}$$

と表される. この積分を用いていく.

$x\in\mathbb{R}$ のとき, $e^x\ge 1+x$ であるから

$$1-x^2\le e^{-x^2}=\frac{1}{e^{x^2}}\le\frac{1}{1+x^2}\ (x\in\mathbb{R})$$

が成り立つ. よって両辺 $n(\ge 1)$ 乗して積分範囲に気をつけて積分すると

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,dx\le\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx\le\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

が成り立つ. ここで, 変数変換より

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,dt\ (\because x=\cos t)$$

$$\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt\ (\because t=\sqrt{n}x)$$

$$\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}t\,dt\ (\because x=\cot t)$$

が成り立つ. よって

$$\sqrt{n}S_{2n+1}\le\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt\le\sqrt{n}S_{2n-2}$$

となる.

一方, $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上で, $0<\sin^{2n+1}t<\sin^{2n}t<\sin^{2n-1}t$ より, $0<S_{2n+1}<S_{2n}<S_{2n-1}$ が成り立つから

$$1<\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}}<\frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n}$$

が得られ, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_{2n}}{S_{2n+1}}=1$ となる. さらに

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt{S_{2n}S_{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n\pi}{2(2n+1)}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

が成り立つ. 以上より

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}S_{2n-2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となるから, はさみうちの原理より

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

が得られ, e^{-t^2} は t に関して偶関数より, $I=\sqrt{\pi}$ を得る. ■

方法 3 [積分の関数を用いる方法] この方法はあまり有名ではないが, 方法 2 と同様に 1 変数だけで I の値を求めることができる.

$t\geq 0$ のとき, $f(t),g(t)$ を

$$f(t)=\left(\int_0^t e^{-x^2}\,dx\right)^2,\, g(t)=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}e^{-t^2(1+y^2)}\,dy$$

と定義する. ここで $f(t),g(t)$ の微分を計算すると

$$\begin{aligned}
f'(t)&=2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}\,dx\\
&=2e^{-t^2}\int_0^1 te^{-t^2y^2}\,dy\ (\because x=ty)\\
&=\int_0^1 2te^{-t^2(1+y^2)}\,dy\\
g'(t)&=\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{1+y^2}e^{-t^2(1+y^2)}\right)\,dy\ (\because \text{積分記号下の微分が可能})\\
&=\int_0^1\left(-2te^{-t^2(1+y^2)}\right)\,dy
\end{aligned}$$

となるから, $f'(t)+g'(t)=0$ が成り立つ. ゆえに, $f(t)+g(t)$ は定数で

$$f(t)+g(t)=f(0)+g(0)=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\,dy=\frac{\pi}{4}$$

が得られる. 一方で

$$|g(t)|\leq\int_0^1 e^{-t^2(1+y^2)}\,dy\leq\int_0^1 e^{-t^2}\,dy=e^{-t^2}$$

が成り立つから, $\lim_{t\to\infty}|g(t)|=0$ となり $\lim_{t\to\infty}f(t)=\dfrac{\pi}{4}$ となる. 以上から

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

が得られ, $I=\sqrt{\pi}$ であることがわかる. ■

方法 4 [Γ 関数と B 関数を用いる方法] Γ 関数と B 関数の基本関係式を用いる.

$\Gamma(s), B(p,q)$ を

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx \ (\operatorname{Re} s > 0), B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx \ (\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0)$$

で定義すると, Γ 関数では $x = y^2$, B 関数では $x = \cos^2\theta$ と置換することで

$$\Gamma(s) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2s-1}\, dy, B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta$$

が得られる. ここで

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1}\, dx\, dy \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2p-1}\theta\, dr\, d\theta \\
&= 2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1}\, dr \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta \\
&= \Gamma(p+q)B(p,q)
\end{aligned}$$

より, $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ が成り立つ.

ここで $I = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ であることに注意する. また

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1, B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$$

であるから

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$$

が成り立ち, よって, $I \geq 0$ であるから $I = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ であることがわかる. ■

方法 5 [複素積分を用いる方法] もしかするとあまり知られていない方法かもしれない.

本題に入る前に次の補題を示す.

補題と証明

補題. $f(z)$ が点 a で 1 位の極をもつとき, $\varepsilon > 0, 0 \leq \alpha \leq \pi$ に対して半円周 $\gamma_\epsilon(t) = a + \varepsilon e^{it}$ $(\alpha \leq t \leq \pi + \alpha)$ にそった線積分について

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \pi i \,\mathrm{Res}(f; a)$$

が成り立つ.

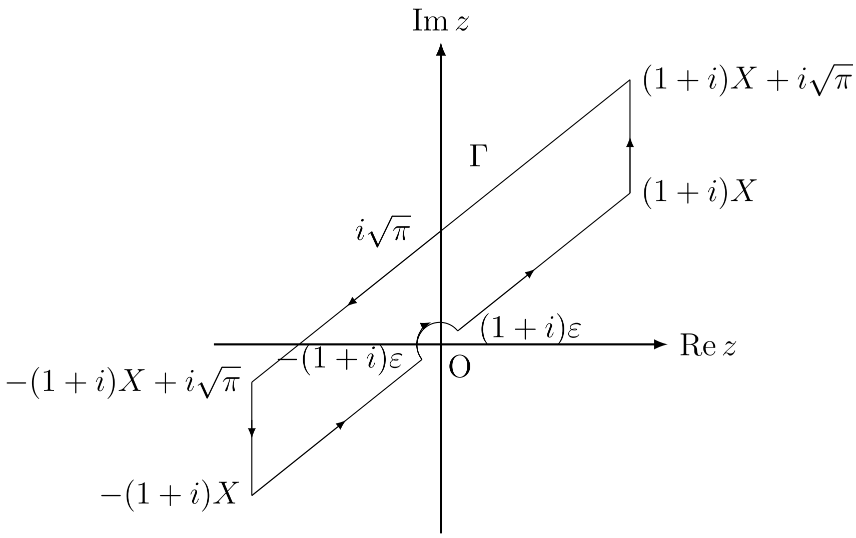
証明. 留数 $c_{-1} = \mathrm{Res}\,(f; a)$ および, 点 a のまわりで正則なある関数 $g(z)$ をもちいて $f(z) = \dfrac{c_{-1}}{z-a} + g(z)$ と表すことができる. このとき

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \pi i c_{-1} + \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz$$

となる. ここで $\left| \displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz \right| \leq \pi i \varepsilon \sup_{|z| \leq \varepsilon} |g(z)| \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ であるから補題が示された. ■

補題の証明が完了したので本題入る. $f(z) = \dfrac{e^{i\frac{z^2}{2}}}{e^{-\sqrt{\pi}z} - 1}$ とする. $X > 0$ に対して点 $X + iX$, 点 $X + i(X + \sqrt{\pi})$, 点 $-X + i(-X + \sqrt{\pi})$, 点 $-X - iX$ で囲まれた平行四辺形から半円をくり抜いたような閉曲線に左回りを正の向きとしたもの与え, それを積分路 Γ とする.

このとき Γ 上に $f(z)$ の 1 位の極 $z = 0$ が存在するため, 先ほどの補題を用いて主値積分として積分の値を求める.



ここで, Γ の下の辺および半円, 右の辺, 上の辺, 左の辺をそれぞれ $\Gamma_{1,\varepsilon}, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ とすると, Cauchy の積分定理より

$$\int_{\Gamma_{1,\varepsilon}} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_4} f(z)\,dz = 0 \tag{*}$$

が成り立つ. ここからは各積分について考えていく.

- $\Gamma_{1,\varepsilon}$ による積分

$L_{1,\varepsilon} : z(t) = (1+i)t\ (-X \le t \le -\varepsilon), -C_\varepsilon : z(t) = \sqrt{2}\varepsilon e^{it}\ \left(\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{3}{4}\pi\right), L_{2,\varepsilon} :$ $z(t) = (1+i)t\ (\varepsilon \le t \le X)$ とすると, $\Gamma_{1,\varepsilon} = L_{1,\varepsilon} - C_\varepsilon + L_{2,\varepsilon}$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{1,\varepsilon}} f(z)\,dz &= \int_{L_{1,\varepsilon}} f(z)\,dz + \int_{-C_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{L_{2,\varepsilon}} f(z)\,dz \\
&= (1+i)\left(\int_{-X}^{-\varepsilon} \frac{e^{-t^2}}{e^{-\sqrt{\pi}(1+i)t}-1}\,dt + \int_{\varepsilon}^{X} \frac{e^{-t^2}}{e^{-\sqrt{\pi}(1+i)t}-1}\,dt\right) - \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz \\
&= (1+i)\int_{\varepsilon}^{X} e^{-t^2}\left(\frac{1}{e^{-\sqrt{\pi}(1+i)t}-1} + \frac{1}{e^{\sqrt{\pi}(1+i)t}-1}\right)dt - \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz
\end{aligned}$$

となる.

- Γ_2 による積分

$\Gamma_2 : z(t) = (1+i)X + it\ (0 \le t \le \sqrt{\pi})$ であり, $z^2 = 2iX^2 - t^2 + 2itX - 2tX$ より $\left|e^{i\frac{z^2}{2}}\right| = e^{\mathrm{Re}\left(i\frac{z^2}{2}\right)} = e^{-X^2-tX} \le e^{-X^2}$ となる. また, 三角不等式より $\left|e^{-\sqrt{\pi}((1+i)X+it)} - 1\right| \ge 1 - e^{-\sqrt{\pi}X}$ であるから十分大きな X に対して $\left|e^{-\sqrt{\pi}((1+i)X+it)} - 1\right| \ge \frac{1}{2}$ が成り立つ.

ゆえに, 十分大きな X に対して

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| \le 2\int_{\Gamma_2} e^{-X^2}\,|dz| = 2\sqrt{\pi}e^{-X^2}$$

となる.

- Γ_3 による積分

$-\Gamma_3 : z(t) = (1+i)t + i\sqrt{\pi}\ (-X \le t \le X)$ より

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz &= -\int_{-\Gamma_3} f(z)\,dz \\
&= -(1+i)\int_{-X}^{X} \frac{e^{i\frac{((1+i)t+i\sqrt{\pi})^2}{2}}}{e^{-\sqrt{\pi}((1+i)t+i\sqrt{\pi})}-1}\,dt \\
&= (1+i)\int_{-X}^{X} \frac{(-i)e^{-t^2}e^{-(1+i)\sqrt{\pi}t}}{e^{-(1+i)\sqrt{\pi}t}+1}\,dt \\
&= (1+i)\int_{0}^{X} e^{-t^2}\left(\frac{(-i)e^{-(1+i)\sqrt{\pi}t}}{e^{-(1+i)\sqrt{\pi}t}+1} + \frac{(-i)e^{(1+i)\sqrt{\pi}t}}{e^{(1+i)\sqrt{\pi}t}+1}\right)dt
\end{aligned}$$

となる.

- Γ_4 による積分

$-\Gamma_4 : z(t) = -(1+i)X + it\ (0 \le t \le \sqrt{\pi})$ であり, Γ_2 のときと同様に積分を評価していく.

$z^2 = 2iX^2 - t^2 - 2itX + 2tX$ より $\left| e^{i\frac{z^2}{2}} \right| = e^{\mathrm{Re}\left(i\frac{z^2}{2}\right)} = e^{-X^2+tX} \leq e^{-X^2+\sqrt{\pi}X}$ となる. また, 十分大きな X に対して三角不等式より $\left| e^{-\sqrt{\pi}(-(1+i)X+it)} - 1 \right| \geq e^{\sqrt{\pi}X} - 1 > 1$ が成り立つ.

ゆえに, 十分大きな X に対して

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_4} f(z)\, dz \right| &= \left| \int_{-\Gamma_4} f(z)\, dz \right| \\
&\leq \int_{-\Gamma_4} e^{-X^2+\sqrt{\pi}X}\, |dz| \\
&= \sqrt{\pi} e^{-X^2+\sqrt{\pi}X}
\end{aligned}$$

となる.

ここで $(*)$ 式の両辺を $\varepsilon \to 0, X \to \infty$ とすると, 補題より

$$(1+i) \int_0^\infty e^{-t^2} \left(\frac{1}{e^{-\alpha t} - 1} + \frac{1}{e^{\alpha t} - 1} + \frac{(-i)e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha t} + 1} + \frac{(-i)e^{\alpha t}}{e^{\alpha t} + 1} \right) dt - \pi i \,\mathrm{Res}\,(f; 0) = 0$$

となる. ただし, $\alpha = (1+i)\sqrt{\pi}$ とおいた. ここで

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^{-\alpha t} - 1} + \frac{1}{e^{\alpha t} - 1} + \frac{(-i)e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha t} + 1} + \frac{(-i)e^{\alpha t}}{e^{\alpha t} + 1} &= -\frac{e^{\alpha t}}{e^{\alpha t} - 1} + \frac{1}{e^{\alpha t} - 1} - i\frac{1}{e^{\alpha t} + 1} - i\frac{e^{\alpha t}}{e^{\alpha t} + 1} \\
&= -1 - i
\end{aligned}$$

であり, $\mathrm{Res}\,(f; 0) = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ より

$$-2i \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt + \sqrt{\pi} i = 0$$

となるから, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となる. よって, $I = \sqrt{\pi}$ であることがわかる. ■